مقدمه‌ای بر تحلیل پوششی داده‌ها و کاربرد آن در صنعت نفت

■ **الهام حسین زاده** *+
استادیار گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم پایه و فنی مهندسی، دانشگاه کوثر بجنورد، بجنورد، ایران
■ **نسیم نصرآبادی**[1]
استادیار گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم ریاضی و آمار، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران
■ **جواد طیبی**[2]
دانشیار گروه مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱/۳۱ ، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۱۱/۶ و تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۱/۱۰
صفحات: ۴۰-۲۹
10.22034/JTD.2022.252175

چکیده

تحلیل پوششی داده‌ها یکی از کاربردی‌ترین شاخه‌های تحقیق در عملیات است که با استفاده از مدل‌های برنامه‌ریزی خطی به ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم گیرنده می‌پردازد. در این مقاله مفاهیم اولیه و مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها را معرفی کرده و سپس با توجه به شرایط امکان تغییر در برخی مفروضات خاص و همچنین اصول موضوعه، به چند بحث مهم درخصوص تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم. در نهایت با ارائه یک مثال کاربردی با نحوه عملکرد مدل‌های معرفی شده بیشتر آشنا می‌شویم.

واژگان کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، مدل CCR، مدل BCC.

* عهده دار مکاتبات
+ شماره نمابر: ۰۵۸۳-۳۲۲۶۲۸۶۲ و آدرس پست الکترونیکی: E.hosseinzadeh@kub.ac.ir
۱ شماره نمابر: ۰۵۶۳-۳۲۲۰۲۵۱۷ و آدرس پست الکترونیکی: Nasimnasrabadi@birjand.ac.ir
۲ شماره نمابر: ۰۵۶۳-۳۲۲۵۲۰۹۸ و آدرس پست الکترونیکی: Javadtayyebi@birjandut.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها(DEA)، یک تکنیک مبتنی بر برنامه‌ریزی ریاضی است که هدف اصلی آن ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده است. تاریخچه تحلیل پوششی داده‌ها در اصل به ایده مطرح شده توسط فارل برمی‌گردد[۱]. وی اولین روش ناپارامتری را برای ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده ابداع نمود. فارل با استفاده از ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده و اصول حاکم بر آنها، مجموعه‌ای را تحت عنوان مجموعه امکان تولید معرفی کرده و قسمتی از مرز آن را به نام تابع تولید معرفی نمود. این مرز کارا نیز نامیده شده و آن دسته از واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ای که روی آن قرار می‌گیرند، واحدهای کارا تلقی می‌شوند.

ازآن‌جایی که تحلیل پوششی داده‌ها کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده را برآورد می‌کند، حداقل یکی از واحدهای تصمیم‌گیرنده روی مرز کارا قرار می‌گیرد و سایر واحدهایی که روی مرز کارا نباشند، در زیر این مرز قرار خواهند داشت. نام تحلیل پوششی داده‌ها نشأت گرفته از ویژگی پوششی بودن این مرز است.

تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها در مقایسه با سایر روش‌هایی که برای ارزیابی عملکرد وجود دارند، دارای برتری‌هایی است که باعث شده کاربردهای آن به‌طرز چشمگیری گسترش یابد. مزیت اصلی تحلیل پوششی داده‌ها را می‌توان به این صورت بیان نمود که این روش فرآیند ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده را با دیدگاه خوش‌بینانه انجام می‌دهد. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برخلاف برخی روش‌های عددی، نیازی به مشخص بودن میزان اهمیت شاخص‌های ورودی و خروجی قبل از اجرا ندارند. این همان مفهوم غیرپارامتری بودن این روش را می‌رساند. در تحلیل پوششی داده‌ها، وزن‌های مربوط به شاخص‌های ورودی و خروجی در طی حل همان مسئله برنامه‌ریزی خطی که کارایی واحد تصمیم‌گیرنده موردنظر را ارزیابی می‌کند و همزمان با ارزیابی کارایی بدست می‌آید. به‌عبارتی، این وزن‌ها به گونه‌ای تعیین می‌شود که واحد تحت ارزیابی بیشترین امتیاز کارایی را داشته باشد. همچنین در تحلیل پوششی داده‌ها نیازی به ضابطه‌های تابعی از قبل تعیین شده(مانند روش‌های رگرسیون آماری) و یا شکل صریح تابع تولید(مانند برخی روش‌های پارامتری) نیست.

تحلیل پوششی داده‌ها به دلیل مبتنی بودن بر نظریه برنامه‌ریزی خطی، امکان مطالعه واحدهایی با چندین ورودی و چندین خروجی را فراهم می‌کند. به‌علاوه، تحلیل پوششی داده‌ها با استفاده از مفاهیم برنامه‌ریزی خطی و بالاخص قضایای دوگانی، نه تنها مقدار کارایی(خوش‌بینانه) را برای هر واحد تصمیم‌گیرنده تخمین می‌زند؛ بلکه به اطلاعات ارزشمند و معناداری در زمینه‌های مختلف، مانند وضعیت بازده به مقیاس واحد تحت ارزیابی، مجموعه واحد(های) مرجع برای واحدهای ناکارا و نیز راهکارهایی برای بهبود عملکرد واحدهای ناکارا نیز دست پیدا می‌کند. همچنین تحلیل پوششی داده‌ها فرصت‌های زیادی را برای همکاری میان تحلیل‌گر و مدیر ایجاد می‌کند. این همکاری‌ها می‌تواند در راستای چگونگی انتخاب ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تحت ارزیابی، انتخاب مدل ارزیابی، نحوه الگویابی نسبت به مرز کارا و نیز نحوه اعمال ارجحیت‌های مدیر در فرآیند ارزیابی کارایی باشد.

در تحلیل پوششی داده‌ها منظور از واحد تصمیم‌گیرنده، سازمان یا موجودیتی است که با دریافت ورودی(ها)، خروجی(ها) را تولید می‌کند. به‌منظور فرمول‌سازی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، فرض می‌کنیم به تعداد n واحد تصمیم‌گیرنده داریم و برای $j = 1, \dots, n$، واحد تصمیم‌گیرنده j ام را با نماد DMU_0 نشان می‌دهیم. با فرض این که $X_j = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}) \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ نشان دهنده بردار ورودی DMU_j و $Y_j = (y_{1j}, y_{2j}, \dots, y_{sj}) \in \mathbb{R}^s \backslash \{0\}$ نشان دهنده بردار خروجی آن باشد، زوج مرتب (X_j, Y_j) را یک فعالیت شدنی نامیده و معمولا آن را با DMU_j یکی در نظر می‌گیریم.

کارایی به معنای خوب کارکردن است و برحسب شاخص‌های درون سازمانی مانند هزینه و سود هر واحد، میزان فروش هر واحد، مقدار مواد اولیه مصرفی توسط هر واحد و غیره تعیین می‌شود. در حالت کلی، کارایی به‌صورت نسبت مجموع وزن‌دار خروجی‌ها به مجموع وزن‌دار ورودی‌ها تعریف می‌شود. کارایی مطلق یک واحد تصمیم‌گیرنده حاصل مقایسه عملکرد آن با استانداردهای کلی و جهانی است؛ در حالی که کارایی نسبی از طریق سنجش عملکرد یک واحد نسبت به سایر واحدهای آن مجموعه بدست می‌آید.

با نمادگذاری‌های معرفی شده در قبل چنانچه فرض کنیم DMU_0 واحد تحت ارزیابی باشد، عبارت

$$E_0 = \frac{u_1 y_{10} + \dots + u_s y_{s0}}{v_1 x_{10} + \dots + v_m x_{m0}} \qquad (1)$$

کارایی(مطلق) DMU_0 را نشان می‌دهد که در آن برای $r = 1, \dots, s$ و $i = 1, \dots, m$ ، u_r قیمت خروجی r ام یعنی y_{r0} و v_i هزینه ورودی i ام یعنی x_{i0} است. این تعریف از کارایی تحت عنوان کارایی اقتصادی نیز نامیده می‌شود. کارایی نسبی هر واحد، از تقسیم اندازه کارایی مطلق آن واحد به بزرگترین آن‌ها

حاصل می‌شود. به عبارت دیگر،

$$RE_0 = \frac{E_0}{\max\{E_j \mid j=1,\dots,n\}} \qquad (2)$$

بنابراین اندازه کارایی نسبی برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده همواره کوچکتر یا مساوی یک بوده و این مقدار برای حداقل یک واحد تصمیم‌گیرنده برابر با یک است.

با درنظرگرفتن نمادگذاری‌ها و تعاریف فوق، اکنون آماده هستیم تا روش تحلیل پوششی داده‌ها را برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده شرح دهیم. پیش از آن تاکید می‌کنیم که برای به‌کارگیری این تکنیک لازم است مفروضات زیر برای مجموعه واحدهای تحت ارزیابی برقرار باشد:

۱) همه واحدهای تصمیم‌گیرنده همگن هستند.

۲) تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده تحت ارزیابی حداقل سه برابر مجموع تعداد شاخص‌های ورودی و خروجی است. به عبارت دیگر $n \geq 3(m+s)$.

۳) داده‌های ورودی و خروجی برای تمامی واحدهای تصمیم‌گیرنده اعداد نامنفی و از نوع نسبی مقیاس است.

۴) مقدار ورودی‌ها، هر چه کمتر باشند بهتر بوده و مقدار خروجی‌ها هر چه بیشتر باشند، بهتر است.

با درنظرداشتن مفروضات فوق، در تحلیل پوششی داده‌ها(و نیز در هر تکنیک دیگری که برای ارزیابی عملکرد مورد استفاده قرار می‌گیرد)، برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم‌گیرنده مجموعه‌ای شامل همه فعالیت‌های شدنی، تحت عنوان مجموعه امکان تولید به‌صورت

$$T = \{(X,Y) \mid \text{. } X \geq 0 \text{ تولید شود } Y \text{ بتواند به وسیله‌ی بردار ورودی } \text{بردار خروجی } \geq 0\}, \qquad (3)$$

بنا نهاده می‌شود. مرز این مجموعه که براساس تکنولوژی تولید مورد نظر تعیین می‌شود، تکنولوژی تولید را مشخص می‌کند. ویژگی مهم تحلیل پوششی داده‌ها که آن را از سایر روش‌های ارزیابی عملکرد متمایز می‌سازد، این است که مرز مجموعه امکان تولید در تحلیل پوششی داده‌ها به‌صورت یک تابع(ناپارامتری) قطعه‌ای خطی و مقعر است. مفهوم کارایی در تحلیل پوششی داده‌ها براساس مفهوم غالب بودن تعریف می‌شود. فرض کنید (X,Y) و $(\bar{X},\bar{Y})$ دو فعالیت در مجموعه T باشند. گوییم (X,Y) غالب بر $(\bar{X},\bar{Y})$ است هرگاه $X \leq \bar{x}$، $Y \geq \bar{Y}$ و نامساوی حداقل به ازای یک مولفه به‌صورت اکید برقرار باشد. یک فعالیت در مجموعه T کارا نامیده می‌شود، اگر و تنها اگر هیچ فعالیت دیگری در T بر آن غالب نباشد.

خاطر نشان می‌کنیم که مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها، هر کدام مبتنی بر یک مجموعه امکان تولید تعریف می‌شوند. مجموعه امکان تولید نیز به‌طور یکتا، براساس تعدادی از اصول موضوعه معین ساخته می‌شود. به‌طورکلی، اصول موضوعه تحلیل پوششی داده‌ها برای تشکیل مجموعه امکان تولید را می‌توان به‌صورت زیر فهرست نمود:

اصل ۱ (شمول مشاهدات). همه فعالیت‌های مشاهده شده به مجموعه امکان تولید تعلق دارند. به‌عبارت دیگر

$$(X_j, Y_j) \in T, \quad j = 1, \dots, n. \qquad (4)$$

این بدیهی‌ترین اصلی است که روی مجموعه قرار داده می‌شود و در مورد همه مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها برقرار است.

اصل ۲ (تحدب). مجموعه T یک مجموعه محدب است. به عبارت دیگر

$$\forall (X,Y), (\bar{X},\bar{Y}) \in T, \quad \forall \lambda \in [0,1], \\ \{\lambda X + (1-\lambda)\bar{X}, \lambda Y + (1-\lambda)\bar{Y} \in T\} \qquad (5)$$

اصل ۳ (بی کرانی اشعه). تمامی فعالیت‌های متعلق به T بازده به مقیاس ثابت دارند. به عبارت دیگر

$$\forall (X,Y) \in T, \qquad \forall \lambda \geq 0, \qquad (\lambda X, \lambda Y) \in T \qquad (6)$$

اصل ۴ (امکان پذیری). اگر یک ورودی مفروض بتواند یک خروجی مفروض را تولید کند، آن‌گاه با هر ورودی ناکمتر از آن ورودی نیز می‌توان هر خروجی نابیشتر از آن خروجی را تولید نمود. به عبارت دیگر

$$\forall (X,Y) \in T, \qquad \forall \bar{X} \in \mathbb{R}^m, \quad \forall \bar{Y} \in \mathbb{R}^s, \\ \bar{X} \geq X, \bar{Y} \leq Y \Rightarrow (\bar{X},\bar{Y}) \in T \qquad (7)$$

اصل ۵ (کمینه برونیابی). مجموعه T کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که در اصل ۱ و (بعضی از) سایر اصول فوق صدق می‌کند.

با درنظرگرفتن اصول موضوعه فوق قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۱. [۱۳] یک مجموعه منحصربفرد به صورت

$$T_c = \left\{ (X,Y): X \geq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, Y \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j, \lambda_j \geq 0, j = 1, \dots n \right\}, \qquad (8)$$

وجود دارد که در اصول ۱ تا ۵ صدق می‌کند.

۲- مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها

بر اساس ایده ارائه شده توسط فارل برای تشکیل مجموعه امکان تولید، مدل‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها با هدف ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده فرمول‌بندی می‌شوند. در حقیقت هدف اصلی این مدل‌ها یافتن پاسخی برای دو سوال زیر است:

۱) آیا واحد تحت ارزیابی(نسبت به مجموعه امکان تولید مورد نظر) کارا است یا خیر؟

۲) اگر پاسخ به سوال فوق خیر است، اندازه کارایی این واحد چقدر است؟

اگر فرض کنیم DMU_0 واحد تحت ارزیابی باشد، با توجه به تعریف مفهوم کارایی به‌منظور پاسخ‌دهی به سوال (۱) کافی‌ست بررسی کنیم که آیا در مجموعه امکان تولید فعالیت دیگری که غالب بر (X_0, Y_0) باشد، وجود دارد یا خیر. اگر هیچ فعالیتی با این ویژگی وجود نداشته باشد، با توجه به تعریف DMU_0 کاراست و اندازه کارایی آن برابر یک خواهد بود. در غیر این صورت، این فعالیت ناکاراست و لذا در زیر مرز کارای مجموعه امکان تولید قرار دارد. در این حالت منطقی این است که اندازه (نا)کارایی آن از طریق مقایسه فاصله آن با مرز کارا تخمین زده شود.

با درنظرگرفتن توضیحات بالا، براساس این که سوال (۱) در کدام یک از سه حالت زیر بررسی شود، مدل‌های ارایه شده ماهیت‌های متفاوتی خواهند داشت:

الف) ماهیت ورودی: آیا در مجموعه امکان تولید فعالیت دیگری وجود دارد که با ورودی کمتر از X_0 بتواند خروجی Y_0 را تولید کند؟

ب) ماهیت خروجی: آیا در مجموعه امکان تولید فعالیت دیگری وجود دارد که با ورودی X_0 بتواند خروجی بیشتر از Y_0 را تولید کند؟

ج) ماهیت ترکیبی(یا بدون ماهیت): آیا در مجموعه امکان تولید فعالیت دیگری وجود دارد که با ورودی کمتر از X_0 بتواند خروجی بیشتر از Y_0 را تولید کند؟

همچنین براساس این که در سوال (۲) فاصله‌ی هر واحد تا مرز کارا با چه معیاری اندازه‌گیری شود، مدل‌های مختلف تحلیل پوششی داده‌ها معرفی شده‌اند.

با توجه به توضیحات فوق مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها از تنوع زیادی برخوردارند و لذا می‌توان آن‌ها را با معیارهای مختلف دسته‌بندی کرده و ویژگی‌های هر کدام را بررسی نمود. به‌منظور اجتناب از اطاله کلام در این مقاله تنها به معرفی دو مدل پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها می‌پردازیم.

اولین مدل اساسی تحلیل پوششی داده‌ها در سال ۱۹۷۸ توسط چارنز، کوپر و رودز[3] ارائه شد[۱۲]. این مدل که به نام مدل CCR شناخته می‌شود، ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در مجموعه امکان تولید T_c انجام می‌دهد. مدل CCR می‌تواند در ماهیت ورودی یا خروجی فرمول‌بندی شود. همچنین ویژگی دیگر این مدل این است که برای محاسبه اندازه کارایی هر واحد تصمیم‌گیرنده از فاصله شعاعی آن واحد تا مرز کارای مجموعه T_c استفاده می‌کند. با این ملاحظات مدل CCR در ماهیت ورودی برای ارزیابی DMU_0 به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned} &\min \quad \theta \qquad (9)\\ &s.t. \quad (\theta X_0, Y_0) \in T_c \end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۱،۱ و اصل شهودی تجرید مسأله فوق با مسأله برنامه‌ریزی خطی زیر که به مدل CCR در شکل پوششی با ماهیت ورودی معروف است، معادل است:

$$\begin{aligned} &\min \theta \\ s.t \quad &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le \theta X_0, \quad (10)\\ &\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \ge \mathrm{Y}_0, \\ &\lambda_j \ge 0, \ \ j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

با درنظرگرفتن این‌که $(X_0, Y_0) \in T_c$، به راحتی معلوم می‌شود که مسأله (۱۰) همواره شدنی است و جواب بهینه متناهی دارد. به علاوه مقدار بهینه تابع هدف آن (یعنی θ_0^*) در ویژگی $0 < \theta_0^* \le 1$ صدق می‌کند.

اگر DMU_0 در مجموعه T_c کارا باشد، آن‌گاه لزوماً $\theta_0^* = 1$. اما عکس این مطلب در حالت کلی برقرار نیست. زیرا $\theta_0^* = 1$ بدان معناست که در مجموعه امکان تولید T_c امکان کاهش متناسب در همه ورودی‌های DMU_0 وجود ندارد. اما چنانچه شرط متناسب بودن کاهش ورودی‌ها را درنظرنگیریم، ممکن است بتوان در مجموعه T_c حداقل یک فعالیت غالب بر (X_0, Y_0) یافت. در این حالت با وجود این که $\theta_0^* = 1$، اما DMU_0 در واقع کارا نیست.

به‌منظور تاکید بر تفاوت، اگر $\theta_0^* = 1$، DMU_0 را کارای ضعیف(تکنیکی) می‌گوییم. اگر $\theta_0^* = 1$ و امکان بهبود در هیچ یک از ورودی‌ها و خروجی‌ها در مجموعه امکان تولید وجود نداشته باشد، آن‌گاه DMU_0 کارای قوی(ترکیبی) نامیده می‌شود. اگر $\theta_0^* < 1$، آن‌گاه DMU_0 در ماهیت ورودی ناکارا است. مقدار θ_0^* را امتیاز کارایی تکنیکی DMU_0 در ماهیت ورودی می‌نامیم. بدیهی است که مقدار $1 - \theta^*$ مقدار ناکارایی تکنیکی در ماهیت ورودی را نشان می‌دهد.

مسأله (۱۰) یک مسأله برنامه‌ریزی خطی است که دوگان آن

3 Charnes, Cooper and Rhodes

به شکل زیر نوشته شده و مدل CCR در ماهیت ورودی در شکل مضربی نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & UY_0 \\ s.t. \quad & VX_0 = 1 \qquad (11) \\ & UY_j - VX_j \le 0, \quad j = 1, \dots, n \\ & U \ge 0, \quad V \ge 0. \end{aligned}$$

با توجه به روابط اولیه و دوگان واضح است که مدل مضربی نیز قابلیت ارزیابی و تعیین امتیاز کارایی را دارد. به علاوه چنانچه واحد تحت ارزیابی ناکارا باشد، هر دو مدل پوششی و مضربی می‌توانند در امر الگویابی نیز مفید واقع شوند. به این صورت که چنانچه (λ^*, θ^*) و (U^*, V^*) یک زوج جواب بهینه برای مدل‌های پوششی و مضربی در ارزیابی DMU_0 با مقدار بهینه تابع هدف کمتر از یک باشند(که در شرط مکمل زاید قوی صدق کنند)، آن‌گاه مجموعه مرجع متناظر با DMU_0 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_0 = \{j|\lambda_j^* > 0\} = \{j|U^*Y_j - V^*X_j = 0\}. \quad (12)$$

مدل CCR را می‌توان در ماهیت خروجی نیز فرمول‌بندی نمود. صورت کلی این مدل برای ارزیابی DMU_0 به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi \qquad (13) \\ s.t. \quad & (X_0, \phi Y_0) \in T_c, \end{aligned}$$

که با استدلالی مشابه با قبل به مسأله‌ی برنامه‌ریزی خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \phi \\ s.t. \quad & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j \le X_0, \qquad (14) \\ & \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j \ge \phi Y_0, \\ & \lambda_j \ge 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

مسأله (۱۴) CCR در ماهیت خروجی در شکل مضربی نامیده می‌شود. مشابه قبل می‌توان نشان داد که مسأله (۱۴) همواره شدنی است و مقدار بهینه تابع هدف آن در ویژگی $\phi_0^* \ge 1$ صدق می‌کند. اگر $\phi_0^* = 1$ آن‌گاه DMU_0 کارای تکنیکی در ماهیت خروجی و در غیر این صورت DMU_0 ناکارا در ماهیت خروجی است. در این حالت مقدار $\frac{1}{\phi_0^*}$ کارایی تکنیکی DMU_0 در ماهیت خروجی و $1 - \frac{1}{\phi_0^*}$ ناکارایی تکنیکی آن در ماهیت خروجی را مشخص می‌کند. مفهوم کارایی قوی در این مدل نیز مشابه قبل تعریف می‌شود.

قضیه ۲,۱. اگر θ_0^* و ϕ_0^* به ترتیب مقادیر بهینه تابع هدف دو مسأله‌ی (۱۰) و (۱۴) باشند، آن‌گاه $\phi_0^* = \frac{1}{\theta_0^*}$[۱۱].

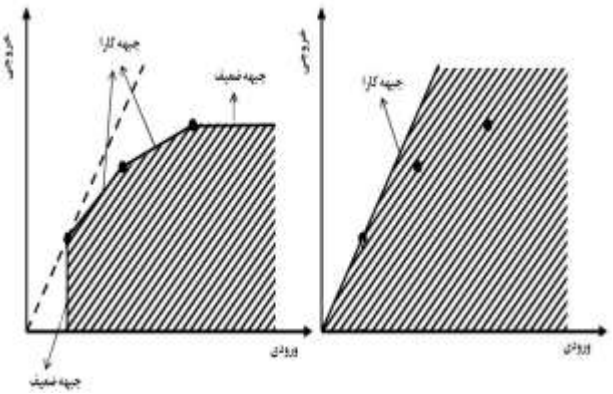
قضیه فوق نشان می‌دهد که با درنظرگرفتن مجموعه امکان تولید T_c، اندازه (نا)کارایی تکنیکی هر واحد تصمیم‌گیرنده در ماهیت ورودی با اندازه (نا)کارایی تکنیکی آن در ماهیت خروجی برابر است.

بعد از معرفی مدل CCR که به‌عنوان اولین مدل پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها شناخته شده است. بنکر[۴]، چارنز[۵] و کوپر[۶] دومین مدل اساسی تحلیل پوششی داده‌ها را در سال ۱۹۸۴ ارایه کردند. این مدل که به نام مدل BCC معروف است، ساختاری مشابه مدل CCR دارد. تنها تفاوت مدل BCC با مدل CCR این است که مدل BCC ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در مجموعه امکان تولیدی انجام می‌دهد که اصل بی‌کرانی اشعه برای آن برقرار نیست. در این رابطه ابتدا لازم است قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه ۲,۲. یک مجموعه منحصر به فرد به شکل زیر وجود دارد که در اصول موضوعه ۱، ۲، ۴ و ۵ صدق می‌کند[۱۱]:

$$T_v = \left\{ (X,Y): X \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j, Y \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Y_j, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \lambda_j \ge 0 \ j = 1, \dots, n \right\}. \quad (15)$$

در حالت ساده با فقط یک ورودی و یک خروجی، شکل شماره ۱ یک شمای کلی از مجموعه‌های T_c و T_v را برای سه واحد تصمیم‌گیرنده نشان می‌دهد.



شکل ۱: مجموعه امکان تولید در حالت ساده یک ورودی و یک خروجی و در دو حالت بازده به مقیاس ثابت(شکل سمت راست) و بازده به مقیاس متغیر(شکل سمت چپ)

مشابه آن چه در مورد مدل CCR داشتیم، مدل BCC را نیز می‌توان در هر دو ماهیت ورودی و خروجی و در شکل‌های پوششی و مضربی نوشت. همچنین می‌توان مفاهیم کارایی

4 Banker
5 Charnes
6 Cooper

تکنیکی و ترکیبی را در مورد این مدل بررسی نمود. نکته قابل توجه در مورد مدل BCC این است که قضیه ۲،۱ در حالت کلی برای مدل BCC برقرار نیست. به‌عبارت دیگر، در حالت کلی برای مدل BCC نمی‌توان یک حکم کلی در مورد ارتباط بین کارایی یک واحد در ماهیت ورودی و کارایی آن در ماهیت خروجی صادر نمود. دلیل این مطلب حذف اصل بی‌کرانی اشعه در مدل BCC می‌باشد.

۳- جنبه‌های دیگر تحلیل پوششی داده‌ها

با وجود این‌که تحلیل پوششی داده‌ها اساسا به‌عنوان روشی برای ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده شناخته شده است، اما در کنار این هدف می‌تواند اهداف دیگری را برآورده کند که از دیدگاه مدیریتی بسیار حائز اهمیت است. به‌عنوان مثال، تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان یک راهکار مناسب و قدرتمند در کاربردهایی مانند الگویابی، رتبه‌بندی و خوشه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده و نیز در تخصیص منابع مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ذیل به‌طور خلاصه نحوه عملکرد تحلیل پوششی داده‌ها را در دو زمینه الگویابی و رتبه‌بندی بیان می‌کنیم.

۳-۱- الگویابی

یکی از موضوعات کلیدی در حوزه ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیرنده، بحث الگویابی برای واحدهای تصمیم‌گیرنده ناکارا است. به‌عبارت دیگر، یکی از ویژگی‌های مطلوب مدل‌های ارزیابی عملکرد آن است که این مدل‌ها علاوه‌بر تخمین اندازه کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، بتوانند مسیر بهبود عملکرد را برای واحدهای ناکارا ارائه دهند. این هدف از طریق فرآیند الگویابی برآورده می‌شود. به بیان دیگر، هدف فرآیند الگویابی این است که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده‌ی ناکارا، یک واحد (مجازی یا حقیقی) را که روی مرز کارای مجموعه امکان تولید قرار داشته و از نظر چگونگی عملکرد بیشترین شباهت را با این واحد داشته باشد، به‌عنوان واحد الگوی متناظر مشخص کند.

خوشبختانه بسیاری از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها و بالاخص مدل‌های اساسی آن، این قابلیت را دارا هستند. یعنی این مدل‌ها همزمان با ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده، عمل الگویابی را نیز به خوبی انجام می‌دهند. به این صورت که جواب بهینه مسأله متناظر در شکل پوششی می‌تواند یک واحد الگو برای واحد تحت ارزیابی مشخص نماید. به منظور اجتناب از پیچیدگی، این فرآیند را تنها برای مدل CCR توضیح می‌دهیم. در این راستا ابتدا قضیه زیر را مطرح می‌نماییم.

قضیه ۱،۳. [۱۱] اگر (θ_0^*, λ^*) یک جواب بهینه برای مسأله ۱۰ باشد، فعالیت(مجازی)

$$(\hat{X}_0, \hat{Y}_0) = (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* X_j , \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^* Y_j)$$

یک فعالیت شدنی است که روی مرز کارای مجموعه امکان تولید T_c قرار دارد.

با توجه به این قضیه واضح است که فعالیت مجازی $(\hat{X}_0, \hat{Y}_0)$ این قابلیت را داراست که به‌عنوان واحد الگوی متناظر با DMU_0 معرفی شود. لازم به ذکر است که این واحد الگو با دیدگاه ورودی محور و با درنظرگرفتن مجموعه امکان تولید T_c بدست آمده است. اما به‌طور مشابه می‌توان واحد الگو با دیدگاه خروجی محور(و یا ترکیبی) را با درنظرگرفتن مجموعه امکان تولید T_c یا T_v تعیین نمود.

۳-۲- رتبه‌بندی

همان‌طور که در بخش قبلی ملاحظه کردیم، مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها به‌صورت اساسی واحدهای تصمیم‌گیرنده را به دو دسته واحدهای کارا و ناکارا افراز می‌کنند. اما در اغلب قریب به اتفاق کاربردها تعداد واحدهای کارا بیشتر از یکی است. یعنی چندین واحد تصمیم‌گیرنده به‌طور همزمان به‌عنوان واحدهای کارا معرفی می‌شوند. این امر بالاخص در حالت‌هایی که تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده در مقایسه با تعداد شاخص‌های ورودی و خروجی کم است، نمود بیشتری پیدا می‌کند. سوالی که مطرح می‌شود این است که چگونه می‌توان واحدهای کارا را با یکدیگر مقایسه نمود؛ یا به‌عبارت معادل، چگونه می‌توان یک رتبه‌بندی روی واحدهای کارا اعمال کرد. این سوال از طریق فرآیند رتبه‌بندی پاسخ داده می‌شود. به‌طور کلی، رتبه‌بندی فرآیندی است که طی آن همه واحدهای تصمیم‌گیرنده به ترتیب نحوه عملکردشان مرتب می‌شود. خوشبختانه تحلیل پوششی داده‌ها امکان انجام این مهم را نیز فراهم می‌کند. موضوع رتبه‌بندی تاکنون توسط بسیاری از محققین این حوزه مورد بررسی قرار گرفته و راهکارهای متنوعی برای این منظور پیشنهاد شده است. با این وجود در اینجا تنها به معرفی تکنیک ارایه شده توسط اندرسون و پیترسون[۷] که به نام روش AP مشهور است اکتفا می‌کنیم.

در روش AP به‌منظور رتبه‌بندی واحدها(بالاخص واحدهای کارا) برای هر واحد تصمیم‌گیرنده امتیازی تحت عنوان امتیاز ابرکارایی مشخص می‌شود. به این صورت که برای هر واحد تصمیم‌گیرنده، ابتدا این واحد را از مجموعه امکان تولید حذف کرده و سپس مدل ارزیابی کارایی موردنظر را برای واحد مورد نظر، نسبت به مجموعه امکان تولید کاهش یافته اجرا می‌کنیم. با

این توضیحات، مدل AP برای محاسبه اندازه ابرکارایی DMU_0، با درنظرگرفتن مدل BCC ماهیت خروجی به‌عنوان مدل پایه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & \gamma \\ s.t. \quad & \sum_{j=1,j\neq 0}^{n} \lambda_j X_j \le X_0, \qquad (17) \\ & \sum_{j=1,j\neq 0}^{n} \lambda_j Y_j \le \gamma Y_0, \\ & \sum_{j=1,j\neq 0}^{n} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \ge 0, \quad j = 1,\dots,n, \ j \neq 0. \end{aligned}$$

با فرض این که γ_0^* مقدار بهینه تابع هدف مساله فوق باشد، مقدار $\frac{1}{\gamma_0^*}$ امتیاز ابرکارایی DMU_0 نامیده می‌شود.

پس از اجرای مدل (۱۷) برای تمامی واحدهای تحت ارزیابی، می‌توان آن‌ها را براساس امتیاز ابرکارایی بدست آمده رتبه‌بندی نمود. قابل توجه است که امتیاز ابرکارایی برای بعضی از واحدهای تصمیم گیرنده کارا ممکن است بیشتر از یک شود. همین نتیجه امکان رتبه‌بندی واحدهای کارا را فراهم می‌سازد. چرا که واحدهای کارا که درمدل BCC معمولی امتیاز کارایی برابر یک گرفتند، در این مدل امتیازهای ابرکارایی متفاوت خواهند داشت.

۴- چند بحث مهم در خصوص تحلیل پوششی داده‌ها

تاکنون مفاهیم پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها و مدل‌های اساسی این روش را به‌طور کلی معرفی نمودیم. به‌منظور استفاده از این تکنیک در ارزیابی عملکرد و سایر کاربردهای آن پایبندی به مفروضات خاصی و نیز پذیرفتن اصول موضوعه‌ای که قبلا ذکر شد، لازم است. با این وجود در بسیاری موارد، با توجه به شرایط امکان تغییر در بعضی از آن‌ها وجود دارد. در ذیل برخی از حالات خاص را توضیح می‌دهیم.

۴-۱- تغییر در فرض‌های اساسی تحلیل پوششی داده‌ها

فرض همگن بودن واحدهای تصمیم‌گیرنده یک فرض اساسی در به‌کارگیری تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها است. با این وجود در حالت‌هایی که این فرض برقرار نباشد، راهکارهایی وجود دارد که امکان استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها را میسر می‌سازد[۱۶، ۱۹ و ۲۶].

یک فرض دیگر در به‌کارگیری تحلیل پوششی داده‌ها، فرض نامنفی بودن و نسبی مقیاس بودن همه داده‌های ورودی و خروجی است. با این حال، می‌توان مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها را به گونه‌ای دستکاری نمود که برای داده‌های ورودی و خروجی که شرط فوق را ندارند نیز قابل استفاده باشد. در حالت وجود داده‌های منفی یک راهکار مناسب استفاده از مدل‌هایی است که تحت انتقال داده‌ها پایا هستند[۵ و ۲۴]. همچنین می‌توان مدل ارائه شده توسط دهنوخلجی و همکاران[۱۵] را برای داده‌های منفی یا بازه‌ای مقیاس به‌کار گرفت.

نکته قابل توجه دیگر در ارتباط با نحوه انتخاب ورودی‌ها و خروجی‌هاست. به‌طور کلی در تحلیل پوششی داده‌ها فرض "در مورد ورودی‌ها هر چه کمتر، بهتر و در مورد خروجی‌ها هر چه بیشتر، بهتر" پذیرفته شده است. اما در بسیاری از کاربردها با ورودی‌ها و یا خروجی‌های نامطلوب سروکار داریم. این نوع شاخص‌ها از نوعی هستند که لزوما در شرط فوق صدق نمی‌کنند. خوشبختانه نسخه‌های تغییر یافته‌ای از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها وجود دارند که قابلیت مدیریت این نوع داده‌های ورودی و خروجی را دارا هستند. خواننده می‌تواند برای مطالعه بیشتر به مراجع [۲۱، ۲۸ و ۲۹] مراجعه نماید.

۴-۲- دستکاری در اصول موضوعه تحلیل پوششی داده‌ها

در این‌جا نحوه دستکاری یا حذف برخی از اصول موضوعه تحلیل پوششی داده‌ها را بررسی می‌کنیم.

۱) در بخش قبل ملاحظه کردیم که چنانچه سیستم تحت ارزیابی در اصل بازده به مقیاس ثابت صدق نکند، می‌توان از مدل‌های با فرض بازده به مقیاس متغیر استفاده نمود. به‌عبارتی تنها با افزودن یک قید تساوی به مدل‌های پوششی(و به‌طور معادل یک متغیر آزاد به مدل‌های مضربی) می‌توان این مدل‌ها را برای سیستم‌های با بازده به مقیاس متغیر نیز بکار برد. با کمی بحث، معلوم می‌شود که با دستکاری اندک می‌توان این مدل‌ها را برای سیستم‌هایی با شرط بازده به مقیاس افزایشی و کاهشی نیز مورد استفاده قرار داد[۱۱].

۲) در بسیاری از کاربردهای تحلیل پوششی داده‌ها با شرایطی سروکار داریم که امکان پذیرفتن اصل تحدب در آن‌ها وجود ندارد. به‌عنوان مثال، زمانی که بعضی از شاخص‌های ورودی و خروجی مربوط به تعداد افراد شاغل در یک واحد تولیدی یا تعداد ماشین‌آلات مورد استفاده در یک واحد تولیدی باشد، پذیرفتن اصل تحدب از دیدگاه منطقی امکان‌پذیر نیست. در این موارد، به‌منظور استفاده از تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها مدل‌هایی فرمول‌بندی شدند که در آن‌ها نیاز به پذیرفتن اصل تحدب نیست[۹، ۱۰ و ۳۲]. این مدل‌ها که تحت عنوان مدل‌های پوسته

دسترسی آزاد[7](FDH) شناخته می‌شوند، در حالت‌های مختلف بازده به مقیاس قابل استفاده هستند.

۳) اصل موضوعه دیگر در تحلیل پوششی داده‌ها اصل امکان‌پذیری است. به زبان ساده این اصل بدین معنی است که زیاد شدن ورودی(ها) در فرآیند تولید مقدار خروجی(ها) را کاهش نمی‌دهد. با این وجود در بسیاری از کاربردها ممکن است این اصل برای سیستم تحت ارزیابی برقرار نباشد. در واقع این سیستم‌ها همان‌هایی هستند که دارای ویژگی تراکم می‌باشند. یعنی در شرایط خاصی اضافه شدن ورودی‌ها باعث بدتر شدن عملکرد سیستم، یعنی کاهش خروجی‌ها می‌شود. برای رفع این مشکل، بحث تراکم در تحلیل پوششی داده‌ها مطرح شده و مدل‌هایی که بتوانند این شرایط را مدیریت نمایند، ارایه شدند[۱۴ و ۱۷].

نکته نهایی که در این جا به آن می‌پردازیم ویژگی بدون ارجحیت بودن مدل‌های تحلیل پوششی داده‌هاست. مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها به‌طور ذاتی مدل‌های بدون ارجحیت هستند، به این مفهوم که هیچ گونه ارجحیتی از جانب مدیر یا تصمیم‌گیرنده اصلی را در فرآیند ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده لحاظ نمی‌کنند. اما در بسیاری از موارد، مدیر به واسطه تجارب مدیریتی خود ممکن است اطلاعات کمی یا کیفی خوبی در ذهن داشته باشد و مایل باشد که این اطلاعات در فرایند ارزیابی عملکرد لحاظ شوند. این اطلاعات ارجحیت ممکن است در ارتباط با مقایسه واحدهای تصمیم‌گیرنده یا مقایسه شاخص‌های ورودی و خروجی انتخاب شده(در مورد اهمیت نسبی آن‌ها) باشند. خوشبختانه تاکنون روش‌های زیادی برای دخیل نمودن اطلاعات ارجحیت تصمیم‌گیرنده در مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها ارایه شده است. از این جمله می‌توان به روش‌های کنترل وزن[۶ و ۲۷]، روش کارایی ارزش[۲۰ و ۲۲]، روش‌های ترکیبی با تحلیل سلسله مراتبی[۳۰، ۳۱ و ۳۳] و غیره[۲۳ و ۲۵] اشاره نمود.

۵- یک مثال کاربردی

همین طور که در بخش‌های گذشته بیان شد، تحلیل پوششی داده‌ها به‌عنوان یک ابزار کارآمد بر پایه ریاضیات کارایی واحدهای مختلف را سنجیده و واحدهای کارا را مشخص می‌نماید. در این خصوص ، مقالات متعددی در حوزه کاربرد تحلیل پوششی داده‌ها در صنعت نفت آمده است. به‌عنوان نمونه، کارایی فنی- زیست محیطی پالایشگاه‌های نفت ایران توسط یک مدل تحلیل پوششی داده‌های فازی چند هدفه چند دوره‌ای در منبع [۱] بررسی شده است. به‌عنوان کار شاخص دیگری در این حوزه، ارزیابی عملکرد ۲۷ سال(۱۳۶۷ - ۱۳۹۳) فعالیت‌های نفتی در کشور ایران با توجه به مفروض بودن بازده به مقیاس ثابت در مقاله[۳] انجام شده است. مقاله [۳] اولین پژوهشی است که جامعه آماری آن شامل چهار شرکت اصلی زیرمجموعه صنعت نفت ایران است. در این مقاله با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها محاسبه کارایی عملکرد مدیریت دانش این شرکت‌ها بررسی شده است.

در این بخش به تشریح یک مثال کاربردی از واحدهای شرکت نفت پاسارگاد می‌پردازیم. این مثال برگرفته از [۴] است. در این مثال فرض دوم از مفروضات اولیه تحلیل پوششی داده‌ها برقرار نیست(یعنی تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده حداقل سه برابر مجموع تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها نیست). با این وجود ما این مثال را به دلیل سادگی و تاکید بر جنبه‌های مقدماتی و آموزشی آن انتخاب کرده‌ایم.

هدف این مثال کاربردی، ارزیابی عملکرد پالایشگاه‌های شرکت نفت پاسارگاد است. با توجه به این که در کشور، شرکت نفت پاسارگاد شش واحد در شهرهای آبادان، اراک، بندرعباس، تبریز، تهران و شیراز دارد، تعداد واحدهای مورد بررسی برابر ۶ است. در ارزیابی عملکرد پالایشگاه‌ها انواع منابع واحدهای قیرسازی مانند ته مانده برج تقطیر، تجهیزات و ماشین‌آلات، نیروی انسانی، آموزش‌های نیروی انسانی، نگهداری و تعمیرات تجهیزات و میزان مصرف انرژی نقش ورودی را داشته و شاخص‌های عملکردی مانند مقدار تولید، مقدار فروش، صادرات و آلاینده‌های زیست محیطی نقش خروجی را دارند. با توجه به اهمیت این شاخص‌ها و کم بودن تعداد واحدهای تصمیم‌گیرنده، از میان ورودی‌ها و خروجی‌های مطرح شده تنها سه شاخص نیروی انسانی، ظرفیت تجهیزات و ته مانده‌ی برج تقطیر به‌عنوان ورودی و دو شاخص مقدار تولید و صادرات به‌عنوان خروجی درنظرگرفته شده‌اند.

در جدول شماره ۱ مقادیر ورودی‌ها و خروجی‌های واحدهای تصمیم‌گیرنده در سال ۱۳۹۲ گزارش شده است. برای ارزیابی این واحدهای تصمیم گیرنده، بسته به شرایط و ویژگی‌های سیستم تحت ارزیابی می‌توان از مدل‌های با بازده به مقیاس ثابت یا متغیر استفاده نمود. به‌عنوان مثال برای ارزیابی اولین واحد تصمیم گیرنده یعنی پالایشگاه آبادان توسط مدل BCC در ماهیت ورودی، مسأله برنامه‌ریزی‌خطی زیر باید حل شود:

$$\min \quad \theta$$

7 Free Disposal Hull

$$
\begin{aligned}
s.t.\quad & 64\lambda_1 + 84\lambda_2 + 91\lambda_3 + 62\lambda_4 + 131\lambda_5 + 80\lambda_6 \\
& \le 64\theta, \\
& 104975\lambda_1 + 217968\lambda_2 + 297428\lambda_3 + 123199\lambda_4 \\
& + 465096\lambda_5 + 249315\lambda_6 \\
& \le 104975\theta, \\
& 2400\lambda_1 + 1650\lambda_2 + 2000\lambda_3 + 1000\lambda_4 \\
& + 2500\lambda_5 + 1400\lambda_6 \le 2400\theta, \\
& 104089\lambda_1 + 217413\lambda_2 + 296767\lambda_3 + 122534\lambda_4 \\
& + 464378\lambda_5 + 248594\lambda_6 \ge 104089, \\
& 40348\lambda_1 + 24073\lambda_2 + 247338\lambda_3 + \\
& 26919\lambda_4 + 55467\lambda_5 + \\
& 18630\lambda_6 \ge 40348 \\
& \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 = 1, \\
& \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 \ge 0
\end{aligned}
$$

به‌طور مشابه می‌توان برای سایر واحدها نیز مدل مربوطه را نوشت. برای حل این مدل می‌توان از هر حل‌کننده مسایل برنامه‌ریزی خطی از جمله لینگو[8] و گمز[9] استفاده کرد. در این‌جا برای حل مدل از جعبه ابزار بهینه‌سازی نرم افزار متلب[10] نسخه ۲۰۱۵b استفاده شده است. در جدول شماره ۲ نتایج حاصل از مدل‌های CCR و BCC در ماهیت‌های ورودی و خروجی آورده شده است. با توجه به مقدار کارایی واحدها در این جدول، مشاهده می‌شود که مدل BBC در هر دو ماهیت ورودی و خروجی همه واحدها را به‌عنوان کارا ارزیابی نموده است، در حالی که در مدل CCR فقط دو واحد بندرعباس و تهران کارا هستند و سایر واحدها ناکارا تشخیص داده شده‌اند. به‌منظور تمایز بین واحدهای تصمیم گیرنده در مدل BBC می‌توان یک مدل رتبه‌بندی را اجرا نمود. در این جا مدل AP را با درنظرگرفتن مدل BBC در ماهیت خروجی را اجرا کرده و نتایج را در سطر آخر جدول شماره ۲ گزارش کرده‌ایم. با توجه به نتایج معلوم می‌شود که از بین واحدهای کارا پالایشگاه بندرعباس رتبه اول و تهران رتبه دوم را داراست.

جدول ۱: مقدار ورودی ها و خروجی‌های واحدهای شرکت نفت پاسارگاد[گزارش عملکرد سالانه شرکت نفت]

DMU	کارخانه	ورودی-۱ نیروی انسانی (نفر)	ورودی-۲ VB (تن)	ورودی-۳ ظرفیت اسمی (بشکه در روز)	خروجی-۱مقدار تولید (تن)	خروجی-۲ صادرات (تن)
۱	آبادان	۶۴	۱۰۴۹۷۵	۲۴۰۰	۱۰۴۰۸۹	۴۰۳۴۸
۲	اراک	۸۴	۲۱۷۹۶	۱۶۵۰	۲۱۷۴۱۳	۲۴۰۷۳
۳	بندرعباس	۹۱	۲۹۷۴۲۸	۲۰۰۰	۲۹۶۷۶۷	۲۴۷۳۳۸
۴	تبریز	۶۲	۱۲۳۱۹۹	۱۰۰۰	۱۲۲۵۳۴	۲۶۹۱۹
۵	تهران	۱۳۱	۴۶۵۰۹۶	۲۵۰۰	۴۶۴۳۷۸	۵۵۴۶۷
۶	شیراز	۸۰	۲۴۹۳۱۵	۱۴۰۰	۲۴۸۵۹۴	۱۸۶۳۰

جدول ۲: نتایج حاصل از اجرای مدل‌ها و رتبه‌بندی واحدهای تصمیم‌گیرنده

مدل	آبادان	اراک	بندرعباس	تبریز	تهران	شیراز
CCR ماهیت ورودی	۰,۹۹۳۴	۰,۹۹۹۰	۱	۰,۹۹۶۲	۱	۰,۹۹۸۶
BCC ماهیت ورودی	۱	۱	۱	۱	۱	۱
CCR ماهیت خروجی	۱,۰۰۶۷	۱,۰۰۱۰	۱	۱,۰۰۳۸	۱	۱,۰۰۱۴
BCC ماهیت خروجی	۱	۱	۱	۱	۱	۱
AP	۰,۹۹۳۴	۰,۹۹۹۰	۵,۵۷۱۰	۰,۹۹۶۲	۱,۱۲۱	۰,۹۹۸۶
رتبه بندی	۶	۳	۱	۵	۲	۴

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به معرفی مفاهیم اولیه تحلیل پوششی داده‌ها پرداختیم. ازاین‌رو، ابتدا مفاهیم اولیه این روش و سپس مدل‌های پایه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها یعنی مدل‌های CCR و BCC را معرفی کردیم. همچنین بعضی از مباحث حائز اهمیت در به‌کارگیری تکنیک تحلیل پوششی داده‌ها به اختصار توضیح داده شدند. در نهایت با یک مثال، کاربرد این مدل‌ها را در ارزیابی کارایی توضیح دادیم. شایان ذکر است که این مدل‌ها را می‌توان برای ارزیابی کارایی واحدهای مختلف از جمله بانک‌ها، موسسات مالی، شرکت‌ها، بیمارستان ها، مراکز آموزشی و غیره که ورودی

8 Lingo
9 Gams
10 Matlab

و خروجی‌های یکسانی دارند، بکار برد. برای مطالعه بیشتر مراجع معتبری مانند منبع [۱۱] مراجعه کنند. درخصوص مفاهیم نظری این حوزه خوانندگان می‌توانند به

فهرست منابع

[۱] حسینی، امینه؛ خلیلی دامغانی، کاوه؛ امامی میبدی، علی؛ **"تجزیه و تحلیل کارایی فنی- زیست محیطی پالایشگاه‌های نفت ایران توسط یک مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه ای فازی چند هدفه چند دوره‌ای"**، مطالعات مدیریت صنعتی، دوره ۱۴، شماره ۴۲، صص ۱۶۷-۱۲۳، ۱۳۹۵.

[۲] رحیمی، مینا؛ نوابخش، مهرزاد؛ **"ارزیابی عملکرد فعالیت‌های نفتی با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده‌ها"**، نهمین کنفرانس ملی تحلیل پوششی داده‌ها، بجنورد، ایران، ۱۳۹۶.

[۳] نجفی، مسعود؛ قاسمی، بهزاد؛ **"تعیین شاخص‌های اصلی، ارزیابی و رتبه‌بندی کارایی عملکرد مدیریت دانش با تحلیل پوششی داده‌ها، مطالعه موردی: صنعت نفت ایران"**، فصلنامه مدیریت راهبردی در سیستم‌های صنعتی(مدیریت صنعتی سابق، دوره ۱۵، شماره ۵۴، صص ۱۰۳-۸۶، ۱۳۹۹.

[۴] نجفی، اسماعیل؛ عبداللهزاده، وحید؛ امیری، محسن؛ **"به‌کارگیری مدل BCC-CCR و روش AP جهت تعیین کارآیی و رتبه‌بندی واحدهای شرکت نفت پاسارگاد"**، ماهنامه علمی-ترویجی اکتشاف و تولید نفت و گاز، شماره ۱۲۰، ۱۳۹۳.

[5] Ali, A. I.; Seiford, L. M.; "*Translation invariance in data envelopment analysis*", Operations research letters, Vol. 9, No. 6, pp. 403-405, 1990.

[6] Allen, R.; Athanassopoulos, A.; Dyson, R. G.; Thanassoulis, E.; "*Weights restrictions and value judgements in data envelopment analysis: evolution, development and future directions*", Annals of operations research, No. 73, pp. 13-34, 1997.

[7] Andersen, P.; Petersen, N. C.; "*A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*", Management science, Vol. 39, No. 10, pp. 1261-1264, 1993.

[8] Banker, R. D.; Charnes A.; Cooper, W.W.; "*Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis*", Management science, Vol. 30.9, pp. 1078-1092, 1984.

[9] Bardhan, I.; WW, C., Sueyoshi, T.; "*Models and Measures for Efficiency Dominance in DEA Part II: Free Disposal Hull (FDH) and Russel Measure (RM) Approaches*", Journal of the Operations Research Society of Japan, Vol. 39, No. 3, pp. 333-344, 1996.

[10] Bogetoft, P.; "*DEA on relaxed convexity assumptions*", Management Science, Vol. 42, Issue 3, pp. 457-465, 1996.

[11] Charnes, A.; Cooper, W.W.; Lewin, A.Y.; Seiford, L.M.; eds.; "*Data envelopment analysis: Theory, methodology, and applications*", Springer Science and Business Media, 2013.

[12] Charnes, A.; Cooper, W.W.; Rhodes, E.; "*Measuring the efficiency of decision making units*", European Journal of Operational Research, Vol. 2, pp. 429-444, 1978

[13] Cooper, W. W.; Seiford, L.M.; Tone, K.; *Data Envelopment Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2000.

[14] Cooper, W. W.; Deng, H.; Gu, B.; Li, S.; Thrall, R. M.; "*Using DEA to improve the management of congestion in Chinese industries (1981–1997)*", Socio-Economic Planning Sciences, Vol. 35, Issue 4, pp. 227-242, 2001.

[15] Dehnokhalaji, A.; Korhonen, P. J.; Köksalan, M.; Nasrabadi, N.; Wallenius, J.; "*Efficiency analysis to incorporate interval-scale data*", European Journal of Operational Research, Vol. 207, Issue 2, pp. 1116-1121, 2010

[16] Dyson, R. G.; Allen, R.; Camanho, A. S.; Podinovski, V. V.; Sarrico, C. S.; Shale, E. A.; "*Pitfalls and protocols in DEA*", European Journal of operational research, Vol. 132, Issue 2, pp. 245-259, 2001.

[17] Fare, R.; Grosskopf, S.; "*Measuring congestion in production*", Zeitschrift für Nationalökonomie, Vol. 43, Issue 3, pp. 257-271, 1983.

[18] Farrell, M.J.; "*The measurement of productive efficiency*", Journal of the Royal Statistical Society, Series A (General), Vol. 120, No. 3, pp. 253-290, 1957.

[19] Haas, D. A.; Murphy, F. H.; "*Compensating for non-homogeneity in decision-making units in data envelopment analysis*", European Journal of Operational Research, Vol. 144, Issue 3, pp. 530-544, 2003.

[20] Halme, M.; Joro, T.; Korhonen, P.; Salo, S.; Wallenius, J.; "*A value efficiency approach to incorporating preference information in data envelopment analysis*", Management Science, Vol. 45, Issue 1, pp. 103-115, 1999.

[21] Jahanshahloo, G. R.; Lotfi, F. H.; Shoja, N.; Tohidi, G.; Razavyan, S.; "*Undesirable inputs and outputs in DEA models*", Applied Mathematics and Computation, Vol. 169, Issue 2, pp. 917-925, 2005.

[22] Korhonen, P.; Soismaa, M.; Siljamäki, A.; "*On the use of value efficiency analysis and some further developments*", Journal of Productivity Analysis, Vol. 17, Issue 1-2, pp. 49-64, 2002.

[23] Lotfi, F. H.; Fallahnejad, R.; Navidi, N.; "*Ranking efficient units in DEA by using TOPSIS method*", Applied

Mathematical Sciences, Vol. 5, No. 17, pp. 805-815, 2011.
[24] Lovell, C. K.; Pastor, J. T.; "*Units invariant and translation invariant DEA models*", Operations research letters, Vol. 18, No. 3, pp. 147-151, 1995.
[25] Mansouri, A.; Naser, E.; Ramazani, M.; "*Ranking of companies based on TOPSIS-DEA approach methods (case study of cement industry in Tehran stock exchange)*", Pakistan Journal of Statistics and Operation Research, Vol. 10, No. 2, 2014.
[26] Mester, L. J.; "*Measuring efficiency at US banks: Accounting for heterogeneity is important*", European Journal of Operational Research, Vol. 98, Issue 2, pp. 230-242, 1997.
[27] Podinovski, V. V.; Athanassopoulos, A. D.; "*Assessing the relative efficiency of decision making units using DEA models with weight restrictions*", Journal of the Operational Research Society, Vol. 49, No. 5, pp. 500-508. 1998.
[28] Scheel, H.; "*Undesirable outputs in efficiency valuations*", European journal of operational research, Vol. 132, No. 2, pp. 400-410, 2001.
[29] Seiford, L. M.; Zhu, J.; "*Modeling undesirable factors in efficiency evaluation*", European journal of operational research, Vol. 142, Issue 1, pp. 16-20, 2002.
[30] Shang, J.; Sueyoshi, T.; "*A unified framework for the selection of a flexible manufacturing system*", European Journal of Operational Research, Vol. 85, Issue 2, pp. 297-315, 1995.
[31] Sinuany-Stern, Z.; Mehrez, A.; Hadad, Y.; "*an DEA/AHP method for ranking decision making units*", European Journal of Operational Research, 1999.
[32] Thrall, R. M.; "*What is the Economic Meaning of FDH*", Journal of Productivity Analysis, Vol. 11, No. 3, pp. 243-250, 1999.
[33] Yang, T.; Kuo, C.; "*A hierarchical AHP/DEA methodology for the facilities layout design problem*", European Journal of Operational Research, Vol. 147, Issue 1, pp. 128-136, 2003.